

1. Einleitung

Die Anleitung zu einem Praktikumsversuch¹ (aus dem Physikalischen Grundpraktikum an der Universität Heidelberg) trug den Titel „Messung der Boltzmannkonstante“. Es ging um das thermische Rauschen von (elektrischen) Widerständen, einem physikalischen Phänomen, das mich schon immer interessierte. Der Versuch wurde ausführlich beschrieben. Ein Nachbau der Messanordnung war, so schien mir, kein Problem. Ich begann zu experimentieren – und scheiterte. Der „Nachbau“ war wohl doch nicht so einfach: Mein Messwert war in keiner Weise mit dem Literaturwert verträglich. Jetzt, nach einigen Jahren, ein zweiter Anlauf, er lehnt sich an dieselbe Praktikumsanleitung¹ an. Die nachfolgenden Kapitel 2 und 3 sind eine Kurzfassung² der Theorie zum Experiment.

2. Nyquist-Beziehung

Thermisches Rauschen³ hat seine Ursache in der Brownschen Bewegung der Ladungsträger in elektrischen Leitern. Diese Bewegung führt dazu, dass an den Enden des Leiters eine statistisch schwankende Spannung $U_r(t)$ anliegt. Sie erzeugt, ausreichend verstärkt, in einem Lautsprecher ein monotones Rauschen, daher der Name „Rauschspannung“. Ihr Mittelwert ist Null, der Effektivwert jedoch nicht. Bezeichnet man zeitliche Mittelwerte durch spitze Klammern $\langle \dots \rangle$, gilt also

$$(1) \quad \langle U_r \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} U_r(t) dt = 0 \quad .$$

Der Effektivwert ist die Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert (engl. *root mean square*, abgekürzt *rms*) der Spannung. Er ist gegeben durch

$$(2) \quad \sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} U_r^2(t) dt} \quad .$$

Jeder ohmsche Widerstand ist ein elektrischer Leiter und deshalb eine Rauschspannungsquelle. Man nennt daher das thermische Rauschen auch einfach Widerstandsrauschen.

Charakteristisch für das thermische Rauschen ist dessen Frequenzspektrum: Es enthält alle Frequenzanteile bis in den THz-Bereich mit gleich bleibender Leistung pro Frequenzintervall. In Analogie zu weißem Licht, bei dem alle Frequenzanteile und damit alle Farben von rot bis blau gleich stark vertreten sind, wird das thermische Rauschen auch weißes Rauschen genannt.

Die Theorie des thermischen Rauschens wurde 1927 von *H. Nyquist* entwickelt. Danach hängt das Quadrat des Effektivwertes der Rauschspannung ab von der Temperatur T , dem Wert R des Widerstands und der Breite Δf des Frequenzintervalls, in dem das Rauschspannungsmessgerät Rauschen empfängt:

$$(3) \quad \langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad (\text{Nyquist-Beziehung}).$$

Dabei ist k die Boltzmannkonstante ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$). Zur Bandbreite Δf ist zu bemerken, dass der Rauschspannungsdetektor in der Regel aus einer Kette von Geräten (Verstärker, Filter und Spannungsmesser) besteht, die zu dieser Größe in unterschiedlicher Weise beitragen. Das macht die experimentelle Bestätigung der Nyquist-Beziehung nicht einfach.

3. Experimentelle Probleme

Die Nyquist-Beziehung experimentell bestätigen bedeutet beispielsweise, mit ihrer Hilfe die Boltzmannkonstante k bestimmen. Das ist unser Ziel. Wie vorhin angedeutet, gibt es jedoch Probleme.

Das erste Problem besteht darin, dass Rauschspannungen in der Regel klein sind. Bei Zimmertemperatur ($T \approx 300 \text{ K}$) beispielsweise beträgt die Rauschspannung eines $10 \text{ k}\Omega$ Widerstands bei einer Bandbreite des Messgeräts von 50 kHz

$$(4) \quad \sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \cdot 10 \text{ k}\Omega \cdot 50 \text{ kHz}} \cong 2,8 \mu\text{V} .$$

Man muss solche kleinen Spannungen verstärken, damit sie von einem üblichen Messgerät (z. B. von einem Millivolt-Effektivwertmesser) angezeigt werden. Ein Verstärker ist jedoch selbst eine Rauschquelle, so dass die gemessene Rauschspannung aus zwei Anteilen besteht – einem Anteil, der vom Widerstand herrührt, und einem Anteil, der durch den Verstärker verursacht wird. Mit den Bezeichnungen

$\sqrt{\langle U_R^2 \rangle}$: verstärkte Rauschspannung (Großbuchstabe R als Index),

$\sqrt{\langle U_V^2 \rangle}$: Rauschspannungsanteil des Verstärkers

ist der Effektivwert der angezeigten Spannung gegeben durch

$$(5) \quad \sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} = \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2\langle U_R \rangle \langle U_V \rangle} .$$

Die einfachen Mittelwerte unter der Wurzel verschwinden nach Gleichung (1), so dass folgt

$$(6) \quad \langle U_{R+V}^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle .$$

Das Quadrat der gemessenen Spannung ist damit die Summe aus den Quadraten der Effektivwerte von (verstärktem) Widerstands- und Verstärkerrauschen. Die Darstellung der gemessenen Spannung als Summe dieser beiden Anteile ermöglicht es, das Rauschen des Verstärkers durch Extrapolation auf den Wert $R = 0$ zu eliminieren. Dass der Verstärker möglichst rauscharm sein sollte, versteht sich von selbst.

Das zweite Problem ist die genaue Bestimmung der Bandbreite Δf . Um eine ausreichend große Rauschspannung zu messen, wäre ein breites Frequenzintervall wünschenswert. Der Bandbreite sind jedoch Grenzen gesetzt. Die obere Grenze ist dadurch gegeben, dass Verstärker und Voltmeter keine beliebig hohen Frequenzen verarbeiten. Die vom Voltmeter angezeigten Effektivwerte werden mit zunehmender Frequenz ungenauer und die Verstärkung des Verstärkers lässt nach. Die obere Grenze wird dadurch unscharf. Abhilfe schafft ein Tiefpassfilter mit möglichst steil abfallender Flanke. Auch die untere Grenze des zu empfangenen Frequenzintervalls ist kritisch: Niederfrequente Störsignale wie z. B. das 50 Hz Netzbrummen und dessen Harmonische koppeln gerne in den Verstärker ein und verfälschen dadurch die Messung. Das verhindert man durch einen Hochpassfilter mit einer, analog zum Tiefpassfilter, möglichst steil ansteigenden Flanke. Die Hintereinanderschaltung von Hoch- und Tiefpassfilter ergibt einen Bandpassfilter, der das benutzte Frequenzintervall bestimmt.

Die Messanordnung zeigt Abbildung 1. Um Einstrahlungen jeglicher Frequenz zu vermeiden, wird der rauschende Widerstand abgeschirmt und ist direkt mit dem Eingang des Verstärkers verbunden.

Das Rauschspannungssignal wird um den Faktor 1000 (+ 60 dB) verstärkt, durchläuft den Bandpass und wird schließlich mit einem Effektivwert-Voltmeter angezeigt. Abbildung 2 ist eine

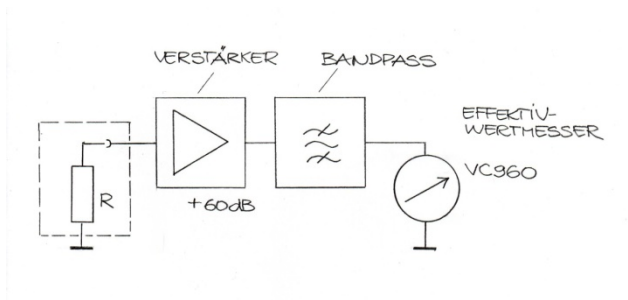


Abbildung 1 Messanordnung. Die am Widerstand R anliegende Rauschspannung wird um das 1000-fache (+60 dB) verstärkt, durchläuft einen Bandpass und wird von einem Effektivwertmesser (VC960) angezeigt.

schematische Darstellung der Wirkung des Bandpasses. Gezeichnet sind die idealisierten Durchlasskurven der Messelektronik mit und ohne Bandpass. Die Bestimmung von k ist im Prinzip einfach: Wir messen für einen gegebenen Widerstand R den Effektivwert der Rauschspannung, ziehen davon den Anteil ab, den Verstärker und Bandpass beitragen, bestimmen Messbandbreite Δf und Temperatur T (in der Regel $T = 300$ K), setzen alle Größen in Gleichung (3) ein und lösen nach k auf.

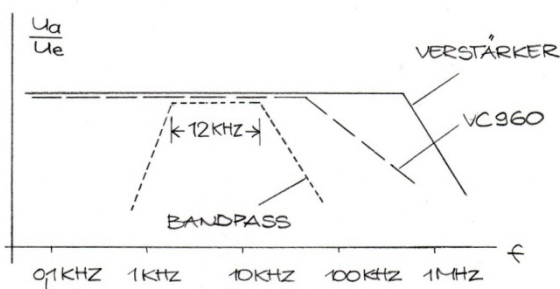


Abbildung 2 Schematische Darstellung des Frequenzgangs von Verstärker, Spannungsmesser und Bandfilter. Der Frequenzgang und die Anzeigegenauigkeit des Spannungsmessers VC960 sind bei höheren Frequenzen nicht bekannt. Daher beschränkt der Bandpass den Frequenzgang der Messelektronik auf ein Intervall zwischen 1.6 kHz und 13.3 kHz.

Das Problem der Messbandbreite Δf erfordert es, den Frequenzgang $g(f)$ der gesamten Anordnung (Verstärker und nachgeschaltetem Bandpass) zu betrachten. Der Frequenzgang ist der Verlauf des Übertragungsfaktors der Verstärker-Bandpass-Schaltung mit der Frequenz f , also das Verhältnis der Ausgangsspannung $U_a(f)$ zur Eingangsspannung $U_e(f)$, betrachtet als Funktion von f :

$$(7) \quad g(f) = \left. \frac{U_a(f)}{U_e(f)} \right|_f.$$

Die Eingangsspannung ist in unserem Fall die Rauschspannung U_r , die Ausgangsspannung die verstärkte Rauschspannung U_R am Ausgang des Bandpasses. Also

$$(8) \quad U_R(f) = g(f) U_r(f).$$

Das Quadrat des Effektivwertes von U_R im Frequenzintervall df ist damit gegeben durch

$$(9) \quad d\langle U_R^2 \rangle = g^2(f) d\langle U_r^2 \rangle .$$

Aus der Nyquist-Formel folgt dann

$$(10) \quad d\langle U_R^2 \rangle = g^2(f) d\langle U_r^2 \rangle = 4kTR g^2(f) df .$$

Integriert man über alle Frequenzen, erhält man

$$(11) \quad \langle U_R^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g^2(f) df .$$

Das Integral lässt sich als äquivalente Rauschbandbreite B definieren:

$$(12) \quad B =_{Df} \int_0^\infty g^2(f) df$$

Sie entspricht dem Produkt aus dem Quadrat des (als konstant betrachteten) Verstärkungsfaktors und der Messbandbreite Δf . Nach Gleichung (6) addiert sich zu dem quadratischen Effektivwert der Spannung in (11) der entsprechende Wert des Verstärkerrauschens. Für die gemessene Spannung gilt

$$(13) \quad \langle U_{R+V}^2 \rangle = 4kTR B + \langle U_V^2 \rangle .$$

Der quadratische Effektivwert der Spannung ist damit eine lineare Funktion des Widerstands R . Der Beitrag des Verstärkerrauschens lässt sich eliminieren, indem man die Messwerte $\langle U_{R+V}^2 \rangle$ in Abhängigkeit von R aufträgt, an die Messpunkte eine Gerade anpasst und deren Steigung $4kTB$ bestimmt. Division durch $4TB$ liefert dann die Boltzmannkonstante k .

Die äquivalente Rauschbandbreite B wird in einer getrennten Messung bestimmt. Die Anordnung für diesen Teil des Versuchs zeigt Abbildung 3. Der Funktionsgenerator liefert ein Sinussignal

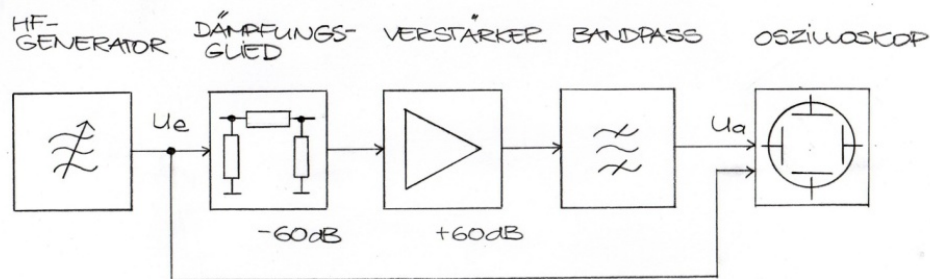


Abbildung 3 Aufbau zur Messung des Frequenzgangs. Gemessen wird die Durchlasskurve der Kombination Verstärker/Bandpass. Das Ausgangssignal des HF-Generators muss durch ein Dämpfungsglied um den Faktor 1/1000 abgeschwächt werden, damit der Verstärker nicht übersteuert wird.

einstellbarer Frequenz und Amplitude, mit dem Oszilloskop werden Ein- und Ausgangsspannung unserer Messelektronik (Verstärker mit nachgeschaltetem Bandpass) gemessen. Das Dämpfungsglied zwischen Funktionsgenerator und Verstärker schwächt das Signal des Funktionsgenerators um das 1000-fache (-60 dB) ab. Ohne dieses würde der Verstärker ($+60$ dB) übersteuert werden und das Signal verzerren. Im vorliegenden Fall ist deshalb

$$(14) \quad g(f) = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U_a^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_e^2 \rangle}},$$

wobei D der Dämpfungsfaktor ($D = 10^{-3}$) des Abschwächers ist.

4. Messung der Rauschspannung

Nach unseren Vorüberlegungen besteht das Experiment aus zwei Messungen: der Messung der Rauschspannung nach Gleichung (13) und der des Frequenzgangs nach Gleichung (14). Zunächst zur Messung der Rauschspannung.

Die μV -großen Rauschspannungen werden, wie schon erwähnt, um den Faktor 1000 (+ 60 dB) verstärkt. Sie sind dann von der Größenordnung Millivolt und können von dem zur Verfügung stehenden Effektivwertmesser angezeigt werden. Mein Verstärker besteht aus zwei in Serie geschalteten nicht-invertierenden Operationsverstärkern, die den Spannungspegel zunächst um den Faktor 20 und anschließend um den Faktor 50 anheben. Im Verstärker des Praktikumsversuchs¹ wird der Operationsverstärker OPA637 verwendet, ein Typ mit JFET-Eingang und extrem kleiner Eingangs-Rauschspannungsdichte ($4,5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$). Ich benutze den etwas preiswerteren JFET-Typ LF357, der mit $12 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ zwar mehr Eigenrauschen erzeugt, das Widerstandsrauschen aber nicht zudeckt. Abbildung 4 zeigt den Stromlaufplan des Verstärkers.

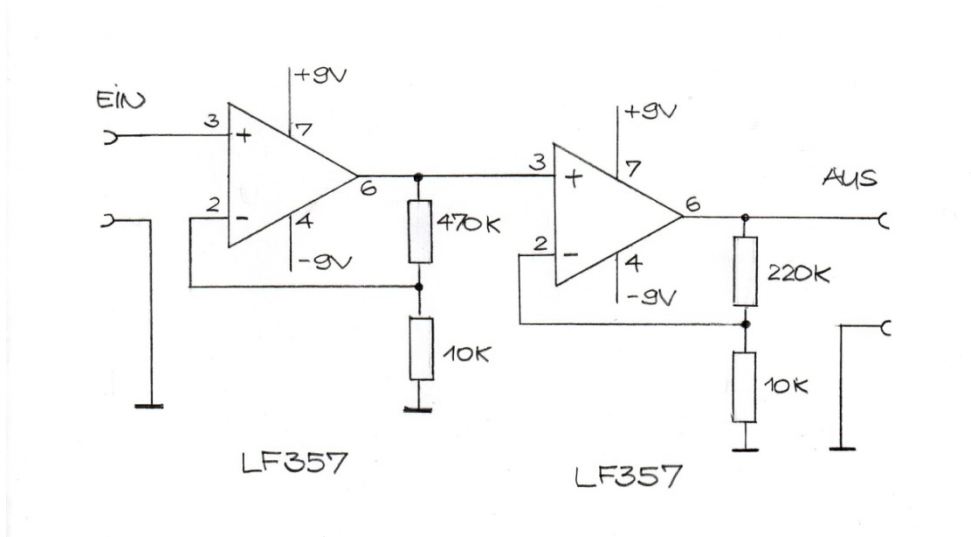


Abbildung 4 Stromlaufplan des Verstärkers. Die am Widerstand anliegende Rauschspannung ist von der Größenordnung Mikrovolt. Ihr Pegel wird um den Faktor 1000 (+60 dB) angehoben, damit die Spannung vom Effektivwertmesser VC960 angezeigt werden kann. Der Operationsverstärker LF357 ist ein Typ mit JFET-Eingang und einer Eingangs-Rauschspannungsdichte von $12 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Der Bandpass besteht, wie üblich, aus der Hintereinanderschaltung eines Hoch- und eines Tiefpasses. Hoch- und Tiefpass sind aktive Filter vom Typ Sallen-Key mit dem rauscharmen Operationsverstärker OP37. Dieser hat, im Unterschied zum LF357, einen Eingang mit bipolaren Transistoren. Seine Eingangs-Rauschspannungsdichte ist $3 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Abbildung 5 zeigt den Stromlaufplan des Bandpasses. Die mit R und C bezeichneten Bauelemente

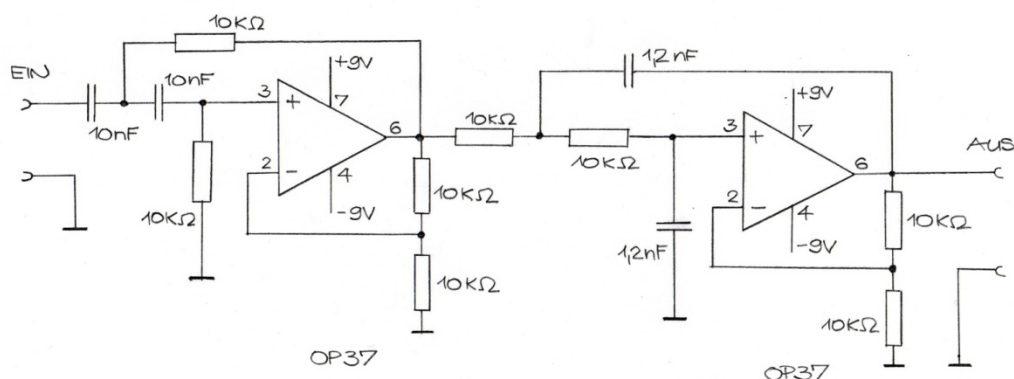


Abbildung 5 Stromlaufplan des Bandpasses, bestehend aus der Serienschaltung eines Hochpasses (auf der Eingangsseite) und eines Tiefpasses (auf der Ausgangsseite). Die beiden Filter sind vom Typ Sallen-Key und benutzen den rauscharmen Operationsverstärker OP37 als aktives Element. Die Grenzfrequenz des Hochpasses ist 1.6 kHz, die des Tiefpasses 13.3 kHz. Damit ergibt sich eine Bandbreite von etwa 12 kHz.

bestimmen die Grenzfrequenzen f_g . Diese sind gegeben durch

$$(15) \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC} .$$

Die Grenzfrequenz des Hochpasses sollte, wie schon erwähnt, groß genug sein, um das 50 Hz-Netzsignal und dessen Oberwellen zu unterdrücken. Mit $R = 10 \text{ k}\Omega$ und $C = 10 \text{ nF}$ folgt $f_g = 1,59 \text{ kHz}$, was als ausreichend angesehen wird. Für die Grenzfrequenz des Tiefpasses wird ein Wert der Größenordnung 10 kHz gewählt. Der Grund dafür ist die beschränkte Genauigkeit des Effektivwertmessers, die weiter unten diskutiert wird. In die Schaltung eingesetzt wurden $R = 10 \text{ k}\Omega$ und $C = 1,2 \text{ nF}$, das führt zu $f_g = 13,3 \text{ kHz}$. Die Bandbreite des Bandpasses und damit die der gesamten Messelektronik sollte daher etwa 12 kHz ($13,3 \text{ kHz} - 1,59 \text{ kHz} = 11,7 \text{ kHz}$) betragen.

Als Effektivwertmesser wird ein Multimeter vom Typ VC960 (Vollcraft/Conrad) verwendet. Die Bedienungsanleitung des Geräts macht zur Genauigkeit der Effektivwert-Messung („TrueRms“) nur kryptische Angaben. Ich interpretiere sie wie folgt: Die Genauigkeit bei Frequenzen unter 100 kHz entspricht nur dann den in der Anleitung angegebenen Werten, wenn man Spannungen im Bereich von 40% bis 100% des „Vollausschlags“ misst. Der „Vollausschlag“ des kleinsten Messbereichs ist 4.000 V, der 40% bis 100%-Bereich entspricht damit Spannungen von mindestens 1,6 V. Die erwarteten Rauschspannungen sind jedoch selbst nach 1000-facher Verstärkung nicht größer als 10 bis 40 mV. Sie werden vom VC960 zwar angezeigt, liegen aber deutlich unter der 1,6 V-Grenze. Es war also vorab zu klären, ob solche Spannungen vom VC960 richtig angezeigt werden.

Die Genauigkeit der Effektivwert-Anzeige lässt sich für den Fall von Sinussignalen überprüfen. Benötigt wird ein einfacher Funktionsgenerator. Dessen sinusförmiges Ausgangssignal wird auf dem Schirm eines Oszilloskops sichtbar gemacht und gleichzeitig an die Klemmen des VC960 gelegt (4.000-V Bereich AC, TrueRms). Die um den Faktor $\sqrt{2}$ verminderte Amplitude des Sinussignals (am Oszilloskop abgelesen) sollte gleich dem vom VC960 angezeigten Effektivwert sein. Das wurde für einige Frequenzen zwischen 0,5 kHz und 100 kHz geprüft. Gemessen wurde bei abnehmender Amplitude des Sinussignals die Spannung, bei der Oszilloskop und VC960 beginnen unterschiedliche Werte anzuzeigen. In Abbildung 6 sind diese Spannungen als Messpunkte eingetragen. Ihr Verlauf wird durch die Ausgleichskurve wiedergegeben. Es zeigt sich,

dass für Frequenzen unter 5 kHz Effektivwerte kleiner als etwa 7 mV vom VC960 nicht richtig angezeigt werden. Im Frequenzbereich bis 10 kHz liegt diese Grenze bei etwa 10 mV.

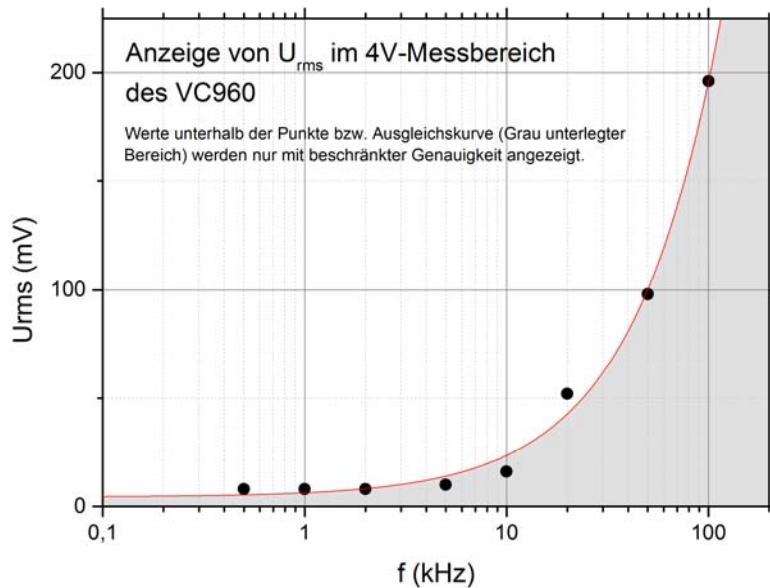


Abbildung 6 Genauigkeit der Anzeige des Effektivwertes im 4.000 V-Bereich (AC, TrueRms) des Multimeters VC960, aufgetragen als Funktion der Frequenz f . Die Messpunkte entsprechen dem minimalen, vom Instrument angezeigten Effektivwert, der gerade noch richtig angezeigt wird. Kleinere Effektivwerte (grau unterlegter Bereich) weichen um mehr als 20 Prozent von denen ab, die man vom Bildschirm eines Oszilloskops abliest. Für Frequenzen unter 10 kHz sollten Effektivwerte größer als etwa 10 mV richtig angezeigt werden.

Die mit dem Oszilloskop bestimmten und am VC960 abgelesenen Effektivwerte gelten für ein Sinussignal mit jeweils definierter Frequenz. Auch wenn sie übereinstimmen, folgt daraus nicht, dass die Rauschspannungen vom VC960 richtig angezeigt werden. Der Grund dafür ist, dass im Rauschspannungssignal mehrere Frequenzen vertreten sind.

Das Ergebnis der Effektivwert-Vergleichsmessungen ist nicht ermutigend: Es gibt keine Garantie, dass die Effektivwerte der Rauschspannungen vom VC960 richtig angezeigt werden. Eine gewisse Sicherheit sollte darin bestehen, die obere Grenzfrequenz des Bandpasses auf etwa 10 kHz zu legen.

Tabelle 1 Ergebnis der Rauschspannungsmessung. Die gemessenen Spannungen sind zwar klein, liegen aber oberhalb der Grenze von 10 mV (Abbildung 6).

Widerstand $R / k\Omega$	Rauschspannung $\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} / mV$	Rauschspannung ² $\langle U_{R+V}^2 \rangle / mV^2$
0	9,5	90,25
8,2	11,5	132,25
10	12,1	146,41
15	12,9	166,41
18	13,6	184,96
22	14,4	207,36
33	16,6	275,56
47	19,1	364,81

Durch die verringerte Bandbreite werden die nachzuweisenden Rauschspannungen allerdings

kleiner. Sie sind aber, wie Tabelle 1 und Abbildung 7 zeigen, immer noch größer als die oben genannte Grenze von etwa 10 mV.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen jetzt zur Rauschspannungsmessung selbst: Abbildung 1 zeigt die schon beschriebene Anordnung. Gemessen wurde der Effektivwert der Rauschspannung, und zwar für Widerstände R zwischen 0 und 47 k Ω . Tabelle 1 listet die Messwerte. Das Quadrat

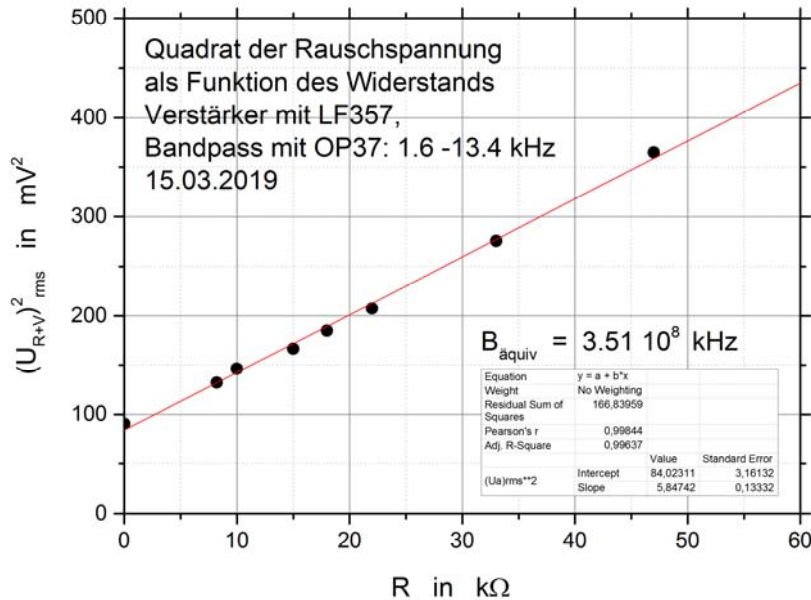


Abbildung 7 Quadrat des Effektivwertes $\langle U_{R+V}^2 \rangle$ der Rauschspannung eines Ohmschen Widerstands als Funktion des Widerstandswerts R . Die Rauschspannung an der Stelle $R = 0$ ist der Anteil $\langle U_V^2 \rangle$ des Verstärkerrauschens. An die Messpunkte wurde eine Gerade nach Gleichung (13) angepasst. Die Steigung der Ausgleichsgerade ist gleich dem Produkt $4kTB$. $B_{\text{äquiv}}$ ist die äquivalente Rauschbandbreite, definiert in Gleichung (12).

$\langle U_{R+V}^2 \rangle$ des Effektivwertes sollte nach Gleichung (13) eine lineare Funktion von R sein. Das ist, wie Abbildung 7 zeigt, in der Tat der Fall. Die Ausgleichsgerade durch die Messpunkte hat die Steigung

$$(16) \quad 4kTB = (5,85 \pm 0,13) \cdot 10^{-9} \text{ VA} \quad .$$

Für die Temperatur setzen wir $T = 300 \text{ K}$, somit muss nur noch die äquivalente Rauschbandbreite B bestimmt werden, um die Boltzmannkonstante k zu erhalten.

5. Messung des Frequenzgangs

Zur Bestimmung der äquivalenten Rauschbandbreite B ist der Frequenzgang $g(f)$ der Serienschaltung von Verstärker und Bandpass zu messen. Abbildung 3 zeigt die bereits beschriebene Anordnung, bestehend aus Funktionsgenerator, Dämpfungsglied, der zu testenden Messelektronik (Verstärker und Bandpass), und einem Oszilloskop als Anzeigeelement. Gemessen wurde nach Gleichung (14) das Verhältnis der Ausgangsspannung zur mit dem Dämpfungsfaktor D multiplizierten Eingangsspannung. Die Spannungen wurden vom Schirm des Oszilloskops als Spitze-zu-Spitze-Werte abgelesen, ihr Quotient ist gleich dem Verhältnis der Effektivwerte in Gleichung (14). Der (Mess-)Fehler von $g(f)$ ist im Wesentlichen gegeben durch die Genauigkeit, mit der die genannten Spannungen vom Bildschirm des Oszilloskops abgelesen werden können. Er ist von der Größenordnung $\pm 5\%$.

Tabelle 2 Messung des Frequenzgangs. Siehe auch Text.

Frequenz f/kHz	Ausgangs- spannung (U _a) _{pp} /V	Aus-/Eingangs- spannung (U _a) _{pp} /(U _e) _{pp}	Dämpfungs- faktor D	Frequenzgang g(f)	Quadrat des Frequenzgangs g ² (f)/10 ⁶
0,5	0,05	0,5	0,0010	500	0,25
0,6	0,08	0,8	0,0010	800	0,64
0,8	0,14	1,4	0,0010	1400	1,96
1,0	0,20	2,0	0,0010	2000	4,00
1,2	0,28	2,8	0,0010	2800	7,84
1,5	0,38	3,8	0,0010	3800	14,44
2,0	0,45	4,5	0,0010	4500	20,25
3,0	0,48	4,8	0,0010	4800	23,04
5,0	0,48	4,8	0,0010	4800	23,04
7,0	0,48	4,8	0,0010	4800	23,04
10	0,48	4,8	0,0010	4800	23,04
15	0,36	3,6	0,0010	3600	12,96
20	0,22	2,2	0,0012	1833	3,36
25	0,12	1,2	0,0014	857	0,73
30	0,09	0,9	0,0014	643	0,41
50	0,03	0,3	0,0015	200	0,04

Das Dämpfungsglied ist eine Widerstandskombination vom π -Typ. Die Widerstände wurden nach den üblichen Formeln für das benutzte 50-Ohm-Kabel (RG 174) berechnet, ergaben aber nicht den gewünschten Dämpfungsfaktor $D = 1/1000$ (– 60 dB). Ihre Werte mussten also etwas nachgebessert

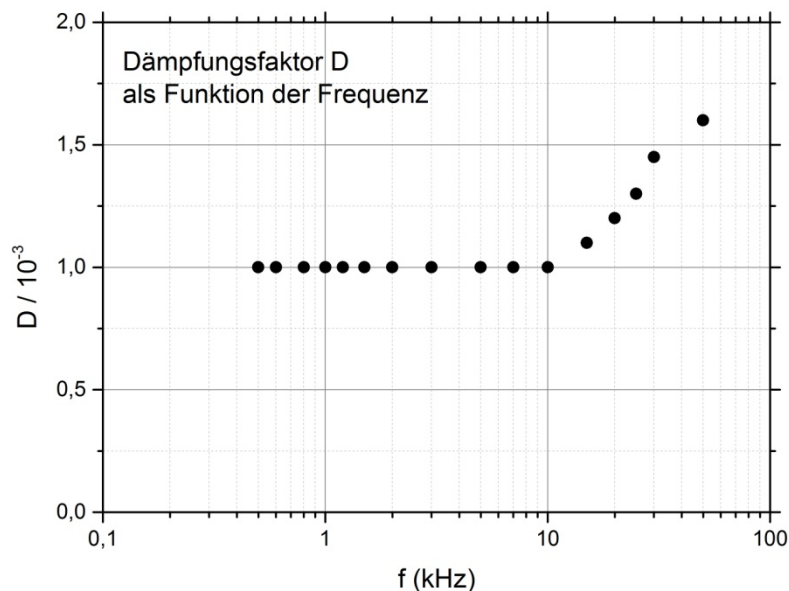


Abbildung 8 Dämpfungsfaktor D des (–60 dB)-Dämpfungsglieds. Der Faktor weicht für Frequenzen größer als 10 kHz vom angestrebten Wert $D = 1/1000$ ab. Die Abweichung wurde bei der Bestimmung des Frequenzgangs berücksichtigt.

werden. Die Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors von der Frequenz war, wie eine Messung zeigte, nur minimal. Abbildung 8 zeigt, dass D nur bei hohen Frequenzen vom genannten Wert abweicht. Diese Abweichung wurde bei der Bestimmung von $g(f)$ nach Gleichung (14) berücksichtigt.

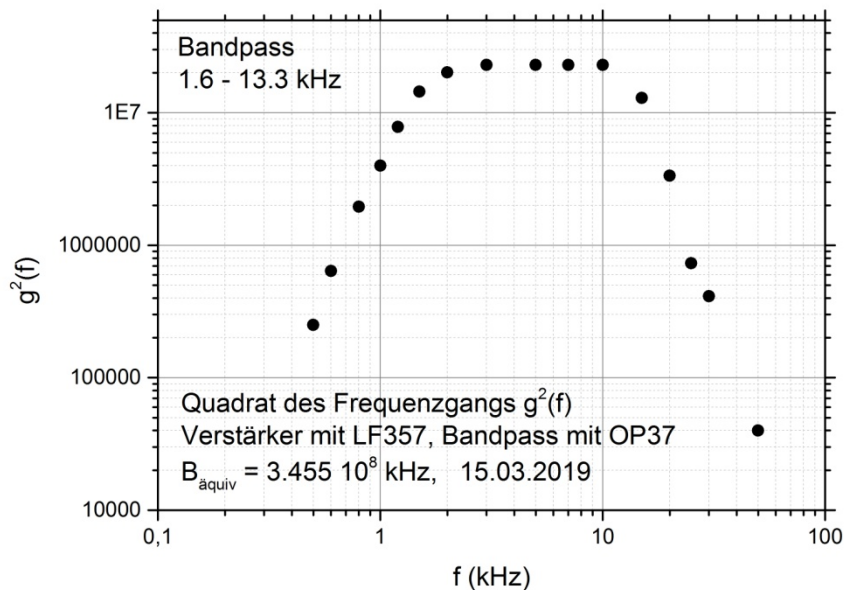


Abbildung 9 Quadrat $g^2(f)$ der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz f (Frequenzgang). Die Fläche unter $g^2(f)$, integriert über alle Frequenzen, ist die äquivalente Rauschbandbreite B nach Gleichung (12), hier $3.46 \cdot 10^8$ kHz. Eine zweite Messung ergab $3.56 \cdot 10^8$ kHz, der Mittelwert aus beiden Messungen ist $3.51 \cdot 10^8$ kHz.

Tabelle 2 zeigt das Ergebnis der Messung des Frequenzgangs. Die vorletzte Spalte dieser Tabelle zeigt den Übertragungsfaktor $g(f)$, die letzte Spalte dessen Quadrat $g^2(f)$, das nach Gleichung (12) zur Berechnung von B benötigt wird. Diese Größe ist in Abbildung 9 als Funktion der Frequenz aufgetragen. Der Verlauf der Messpunkte bestätigt die Bandbreite von ca. 10 kHz.

Die Fläche unter $g^2(f)$ geht nach Gleichung (11) als äquivalente Rauschbandbreite B in die Nyquist-Formel ein. Sie wurde mit Hilfe einer Integrationsroutine⁴ numerisch bestimmt und beträgt $B = 3,46 \cdot 10^8$ kHz. Eine zweite Messung ergab einen um $0,11 \cdot 10^8$ kHz größeren Wert. Der Mittelwert

$$(17) \quad B = (3,51 \pm 0,35) \cdot 10^8 \text{ kHz}$$

wird als endgültiger Messwert betrachtet. Der Fehler von B kann nur geschätzt werden. Da für $g(f)$ eine Unsicherheit von $\pm 5\%$ angenommen wurde, sollte er von der Größenordnung $\pm 10\%$ sein, also wie angegeben $\pm 0,35 \cdot 10^8$ kHz betragen.

6. Das Ergebnis: die Boltzmannkonstante

Wir fassen die Messungen von Rauschspannung und Bandbreite zusammen: Aus den Zahlenwerten (16) und (17) folgt für die Boltzmannkonstante

$$(18) \quad k = \frac{(5,85 \pm 0,13) \cdot 10^{-9} \text{ VA}}{4 \cdot 300 \text{ K} \cdot (3,51 \pm 0,35) \cdot 10^{11} \text{ Hz}} = (1,39 \pm 0,17) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} .$$

Wie schon erwähnt, ist der Messfehler von k nur ein grober Schätzwert. Dass der Zahlenwert mit dem Literaturwert $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ fast übereinstimmt, ist Zufall.

Insofern ist es beruhigend, dass eine Messung mit der größeren Bandbreite $B = 6,2 \cdot 10^8$ kHz innerhalb des Fehlers dasselbe Ergebnis lieferte, und zwar

$$k = 1,42 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} .$$

In diesem Fall waren die Rauschspannungen größer. Die obere Grenzfrequenz des Bandpasses betrug jedoch 26 kHz, so dass die Durchlasskurve $g(f)$ geringfügig in den Bereich hineinragte, in dem das VC960 Effektivwerte von Spannungen nur ungenau anzeigt (Abbildung 6). Andererseits wird der Bereich der verminderten Anzeigegenauigkeit des Instruments nur gestreift, daher sollte der Einfluss auf den Messwert klein sein.

Das Experiment ist anspruchsvoll – im Niveau kaum zu vergleichen mit den Versuchen, die ich während meines Studiums im physikalischen *Grundpraktikum* auszuführen hatte. Es setzt eine gewisse Ausstattung mit Geräten voraus, lässt sich aber mit Erfolg auch auf die Ebene Physikals-Hobby heruntertransformieren.

Literatur und Anmerkungen

¹ Physikalisches Grundpraktikum der Universität Heidelberg, Versuch 243: Thermisches Rauschen, <http://docplayer.org/79178405-Universitaet-heidelberg-physikalisches-praktikum-pap-2-fuer-studierende-der-physik.html>

² Die Formelsymbole im nachfolgenden Text sind dieselben wie in der Praktikumsanleitung¹.

³ auch *Johnson*-Rauschen oder *Nyquist*-Rauschen genannt.

⁴ Integrationsroutine der Origin-Software